Partie A

On remarque qu'un nombre N est sectionnable s'il existe un entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} = N$
ce qui s'écrit $n^2 + n - 2N = 0$

1. a. L'équation $n^2 + n - 2 \times 21 = 0$ a pour discriminant 169 et pour solution entière positive $n = 6$
L'équation $n^2 + n - 2 \times 136 = 0$ a pour discriminant 1 089 et pour solution entière positive $n = 16$
21 et 136 sont donc bien sectionnables unitaires.
b. L'équation $n^2 + n - 2 \times 1\,850 = 0$ a pour discriminant 14 801 qui n'est pas un carré parfait et donc n'a donc pas de solution entière. 1 850 n'est donc pas sectionnable.
Remarque
On peut aussi raisonner avec des inégalités. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(60) < 1850 < f(61)$.

2. Un entier a supérieur ou égal à 3 est un entier sectionnable unitaire si et seulement si l'équation $n^2 + n - 2a = 0$ admet au moins une solution entière positive.
Cela signifie que son discriminant $1 + 8a$ est un carré parfait et qu'au moins une des solutions de l'équation, à savoir $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$, est un entier positif.
Ceci équivaut à $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier tel que $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ soit un entier (l'autre solution est négative) soit $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier impair.

Partie B

1. $9 = 4 + 5$ et $15 = 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ donc 9 et 15 sont sectionnables.
En revanche, $1+2+3+4+5 < 16 < 1+2+3+4+5+6$, $2+3+4+5 < 16 < 2+3+4+5+6$, $3+4+5 < 16 < 3+4+5+6$, $4+5+6 < 16 < 4+5+6+7$, $5+6 < 16 < 5+6+7$, $6+7 < 16 < 6+7+8$, $7+8 < 16 < 7+8+9$ et $8+9 > 16$ donc 16 n'est pas sectionnable.

2. Si n est un entier impair supérieur ou égal à 3, alors il existe un entier k non nul tel que $n = 2k + 1$ soit $n = k + (k+1)$ ce qui prouve que n est sectionnable.

3. $S = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+k) = kq + (1+2+3+\cdots+k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$
Soit $2S = 2kq + k(k+1) = k(k+1+2q)$

4. Pour tout entier p, $p \geq 1$, si $N = 2^p$ alors $2N = 2^{p+1}$est aussi une puissance de 2. Or, quelle que soit la parité de l'entier k, le nombre $k(k+1+2q)$ est le produit d'un entier pair par un entier impair puisque $1 + 2q$ est un entier impair. Il ne peut donc être une puissance de 2.

5. **a.** $56 = 2^3 \times 7$ et $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(7+1+8) = 7(7+1+2\times 4)$ et on peut écrire, en posant $k = 7$ et $q = 4$, $56 = 5+6+7+8+9+10+11$.
b. $2 \times 44 = 8 \times 11 = 8(8+1+2\times 1)$ et $44 = 2+3+4+5+6+7+8+9$.
c. Soit n un nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2. Alors il existe un unique couple d'entiers (r, m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n = 2^r \times m$ et $2n = 2^{r+1} \times m$
On considère deux cas :
Si $m > 2^{r+1}$ alors $m \geq 2^{r+1} + 1$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = 2^{r+1}(2^{r+1} + 1 + 2q)$. On peut alors écrire $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q + 2^{r+1})$.
Si $m < 2^{r+1}$ alors $m + 1 \leq 2^{r+1}$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = m(m + 1 = 2q)$. On peut alors écrire $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+m)$.

6. En regroupant les résultats de la question 2 et de la question 5, l'ensemble des nombres sectionnables est constitué des nombres entiers impairs et des nombres positifs pairs qui ne sont pas une puissance de 2.

Partie C

1. $2 \times 13 = 26 = 2(2 + 1 + 2 \times 5)$ ce qui donne $13 = 6 + 17$ et il n'y a pas d'autres décompositions possibles car, 13 étant un nombre premier, il n'y a qu'un produit de deux entiers p et q supérieurs ou égaux à 2 et tels que $pq = 13$ et $q \geq p + 1$.
   En revanche, $50 = 5(5 + 1 + 2 \times 2) = 2(2 + 1 + 2 \times 11)$ ce qui donne $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ mais aussi $25 + 12 + 13$.
2. **a**. Si $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$ où $k \geqslant 3$
   Si k est pair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ et $n = k'(2q + k'(2k' + 1))$ et comme $k \geq 3$, $k' \geq 2$ et n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   Si k est impair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k' + 1$ et $n = kq + k(k' + 1) = k(q + k' + 1)$ et, comme $k \geq 3$, n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   b. Si n est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors il est impair et donc sectionnable d'après la partie B. De plus, en reprenant le résultat et les notations de la question précédente, la décomposition $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k)$ ne peut comporter que deux termes.
   On a alors $n = (q + 1) + (q + 2)$ où $q = \frac{n-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque n est un entier impair supérieur ou égal à 3 et n est bien uniquement sectionnable.

Remarque : On peut aussi raisonner directement comme cela a été fait pour l'entier 13. En effet, si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, $2 \times p$ est la seule décomposition de l'entier $2p$ en produit de deux nombres supérieurs ou égaux à 2 où l'un est strictement supérieur à l'autre.
Alors $2p = 2(2 + 1 + 2q)$ où $q = \frac{p-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque p est un entier impair supérieur ou égal à 3.